第三章 测量数据的误差及精度分析

1 误差理论的基本知识

2 衡量精度的指标

3 算数平均值计算中误差

4 误 差 传 播 定 律

5 权

6 误差理论的一些基本应用

3.1 误差理论的基本知识

大量实践表明，当对某一未知量进行多次观测时，不论测量仪器多么精密，观测的多么仔细，观测值之间总是存在差异。

例如：往、返丈量某段距离若干次，或重复观测某一角度，观测结果都不一致。再如，测量某一平面三角形的三个内角，其观测值之和常常不等于理论值180º。

对变量进行观测和测量过程中反映出的偏差称为测量误差。通常把仪器、观测者的技术水平和外界条件三方面称为观测条件。观测条件相同的各次观测称为等精度观测，反之称为非精度观测。

3.1.1 误差的来源

➢ 观测值的真误差：

真误差＝观测值－真值

$$\Delta = l - L$$

真值：客观存在(有时未知)

误差来源

仪器误差　　人的因素　　外界环境　　观测条件

3.1.1 误差的来源

(1) 仪器误差

测量总是用某种仪器或工具来进行的，仪器或工具不可能十分完善，因而会对观测结果产生影响。

(2) 人的因素

观测或仪器的操作总是需要人来完成，而人的能力是有限的，会对观测结果带来影响。

(3) 外界环境

观测总是在某种特定环境中进行的，且环境在不断变化，因此会对观测结果造成影响。如电磁波测距会受到空气温度、气压、湿度、密度分布等的影响。

(4) 观测条件

上述仪器条件、人的因素和外界环境的总体称为观测条件或测量条件。

3.1.2 误差的分类

观测误差按其对测量结果的影响，一般可分为：系统误差、偶然误差和粗差。

(1) 系统误差

系统误差指在相同的观测条件下对某量的一组观测值，其大小和符号呈现出某种*规律性变化*的误差。

如：用名义长度为30m的钢尺量距，而该钢尺的实际长度为30.004m，则每量一尺段会产生-0.004m的系统误差。

系统误差在数值上一般表现为如下几种形式：

1) 固定误差项：系统误差的大小和符号保持不变。

2) 累积误差项：系统误差随着测量过程不断增加。

3) 周期误差项：误差的大小和符号表现为规律性或周期性的变化。

3.1.2 误差的分类

(2) 粗差

粗差是失误造成的个别大误差，也称错误。主要由于观测者使用的仪器不合格、观测者的疏忽大意或外界条件发生意外变动等引起的。

粗差会对最终结果造成很大损害，必须消除。为了杜绝粗差，除认真仔细作业外，还必须采取必要的检核措施。例如，对距离进行往、返测量；对角度进行重复观测等。

(3) 偶然误差

在相同的观测条件下，对某量进行一系列观测，若误差出现的大小和符号均不一定，则这种测量误差称为偶然误差，也称为随机误差。

3.1.3 偶然误差的分布

例如，对一个三角形的三个内角进行观测，由于观测存在误差，三角形各内角的观测值之和 l 不等于其真值180º 用 L表示真值，则 l 与 L 的差值 Δ 称为真误差。

观测96个三角形，计算它们内角和观测值的真误差。按其大小及一定的区间(本例取0.5˝)，统计如下表：

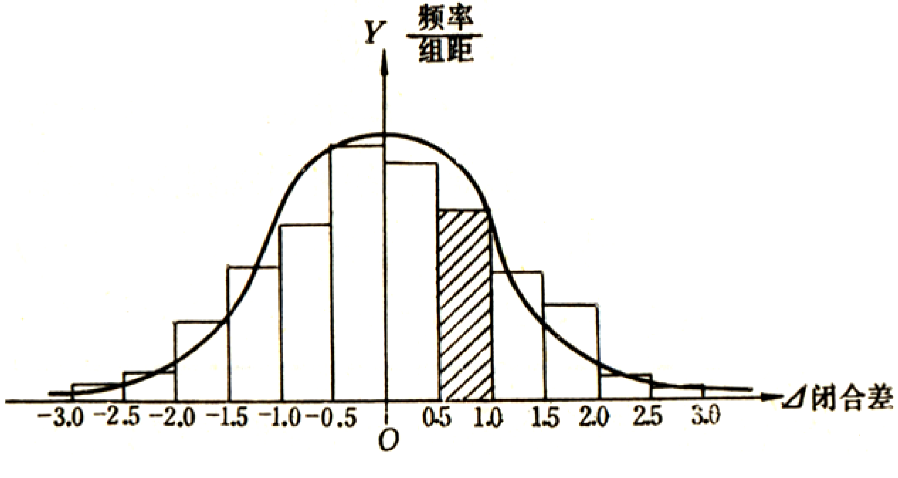
误差所在区间	正误差个数	负误差个数	总　　数
0.0˝-0.5˝	19	20	39
0.5˝-1.0˝	13	12	25
1.0˝-1.5˝	8	9	17
1.5˝-2.0˝	5	4	9
2.0˝-2.5˝	2	2	4
2.5˝-3.0˝	1	1	2
3.0˝以上	0	0	0
	48	48	96

3.1.3 偶然误差的分布

统计结果一般用频率直方图来表示。以横坐标表示三角形内角和的偶然误差 Δ，在横坐标轴上自原点向左右截取误差区间；纵坐标表示各区间内误差出现的相对个数 n_i/n (亦称为频率)除以区间间隔(亦称组距)，即频率/组距。

作图时，以横坐标误差区间为底，向上作矩形，使每个矩形的面积等于该区间误差出现的频率 n_i/n。

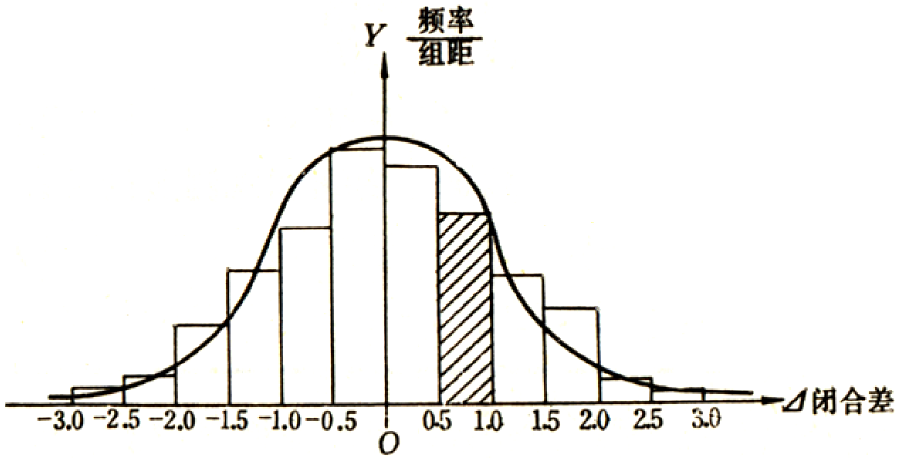
n：总误差个数，n_i：出现在该区间的误差个数。



3.1.3 偶然误差的分布

显然，图中矩形面积的总和等于1，而每个矩形面积表示在该区间内偶然误差出现的频率。例如，图中有阴影的矩形面积，表示误差出现在+0.5″~1.0″之间的频率，其值为 n_i/n=13/96=0.136。

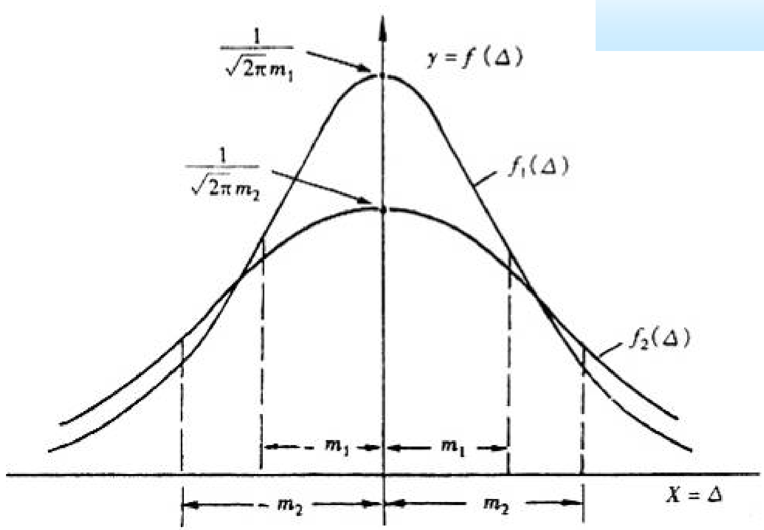
如果在相同的观测条件下，观测更多的三角形内角，可以预期，随着观测次数的不断增多，误差出现在各区间的频率就趋向一个稳定值—概率。



3.1.3 偶然误差的分布

就单个偶然误差而言，其大小和符号都不可预测，但对大量偶然误差而言，其大小和符号具有统计上的规律性。其分布函数一般服从正态分布：

$$f(\Delta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}$$



不同中误差的正态分布曲线

从正态分布概率密度函数图可以看到，σ 能表征误差分布的平缓与陡峭程度。因此，能用来表征偶然误差分布的密集或离散程度。

3.1.3 偶然误差的分布

1) 有界性：在一定的观测条件下， 偶然误差的绝对值不会超出一定的限值，或者说，超过该限值的误差出现概率为零。

2) 密集性：绝对值较大的偶然误差出现的概率比绝对值较小的偶然误差出现的概率小。

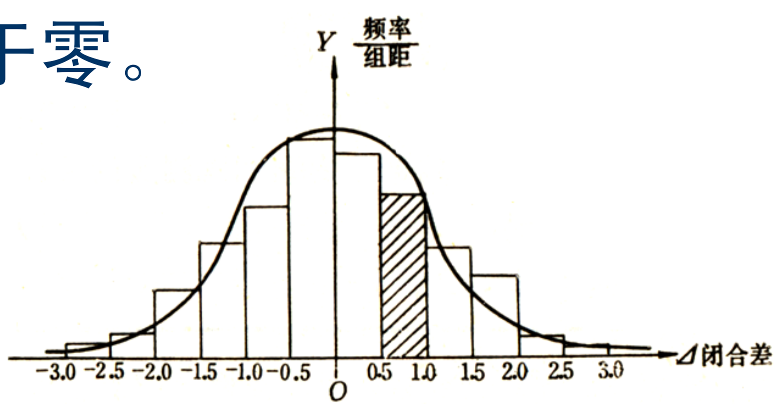
3) 对称性：绝对值相等的正、负误差出现的概率相同。

4) 抵偿性：同一量的等精度观测，当观测次数无限增加时，偶然误差的算术平均值趋近于零。

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n}=0$$

式中，$[\Delta]=\Delta_1+\Delta_2+\cdots\Delta_n$



3.1.4 与误差相关的一些基本概念

(1) 或然误差

由于观测值的真值一般不能确定，因此，真误差也是不能确定的。实际当中，一般用一个较好的估值 $\hat{L}$ 来代替真值，作为真值的近似值。估值 $\hat{L}$ 与观测值 l 之差称为或然误差。

$$v = \hat{L} - l$$

(2) 必要和多余观测

在测量过程中为了确定某些未知量，所需要的最少观测值称为必要观测值，其数目称为必要观测数。

为了增加可靠性必须有一定数目的多余观测值。多余观测值指必要观测值之外的额外观测值。

3.1.4 与误差相关的一些基本概念

(3) 精度与准确度

精度是指观测值或随机量的离散程度。某一观测序列观测值的分布越密集，则认为观测值的精度越高。

准确度是指序列观测值相对于真值的系统性偏离程度，即序列观测值包含的常数项系统误差的大小。系统性偏离程度越小，即系统误差越小，则序列观测值准确度越高。

观测值的总误差Ω等于系统误差Δ与偶然误差ε之和：

$$\Omega = \Delta + \varepsilon$$

第三章 测量数据的误差及精度分析

1 误差理论的基本知识

2 衡量精度的指标

3 算数平均值计算中误差

4 误 差 传 播 定 律

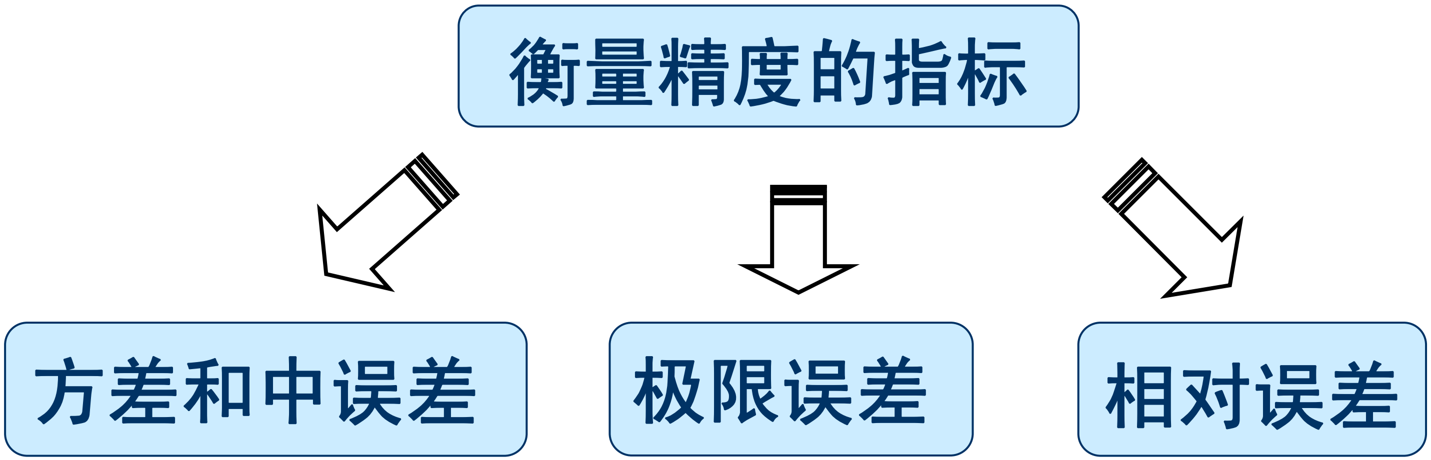
5 权

6 误差理论的一些基本应用

3.2 衡量精度的指标

为了衡量观测值精度的高低，可以使用频率直方图的方法，但这种做法在实际应用时十分不便。

应该寻求一种应能够反应误差分布密集或离散程度的数值，作为衡量精度的指标。



3.2.1 方差和中误差

设对某一未知量x进行n次等精度观测，其观测值分别为l_1、l_2、……、l_n，其相应的真误差为Δ_1、Δ_2、……、Δ_n，则定义该组观测值的方差D为

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\Delta_1^2+\Delta_2^2+\cdots+\Delta_n^2\right]}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta\Delta]}{n}$$

式中，$\Delta_i=l_i-L$；L为未知量的真值。

显然，方差D是当观测次数$n\to\infty$时，Δ_i^2的理论平均值。

3.2.1 方差和中误差

标准偏差的定义为：

$$\sigma=\sqrt{D}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\ldots\Delta_n^2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}$$

当n为有限值时，按有限次数观测值的偶然误差求得的标准偏差称为中误差。

测量学中常用m来表示中误差的估值。

$$m=\pm\hat{\sigma}=\pm\sqrt{\frac{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\ldots\Delta_n^2}{n}}=\pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}$$

中误差计算示例

表 5-2　　按观测值的真误差计算中误差

次　　序	第一组观测			第二组观测		
	观测值 l	真误差 $\Delta('')$	Δ^2	观测值 l	真误差 $\Delta('')$	Δ^2
1	180°00′03″	−3	9	180°00′00″	0	0
2	180°00′02″	−2	4	179°59′59″	+1	1
3	179°59′58″	+2	4	180°00′07″	−7	49
4	179°59′56″	+4	16	180°00′02″	−2	4
5	180°00′01″	−1	1	180°00′01″	−1	1
6	180°00′00″	0	0	179°59′59″	+1	1
7	180°00′04″	−4	16	179°59′52″	+8	64
8	179°59′57″	+3	9	180°00′00″	0	0
9	179°59′58″	+2	4	179°59′57″	+3	9
10	180°00′03″	−3	9	180°00′01″	−1	1
∑| |		24	72		24	130
中误差	$m_1 = \pm\sqrt{\frac{\sum\Delta^2}{10}} = \pm 2''.7$			$m_2 = \pm\sqrt{\frac{\sum\Delta^2}{10}} = \pm 3''.6$		

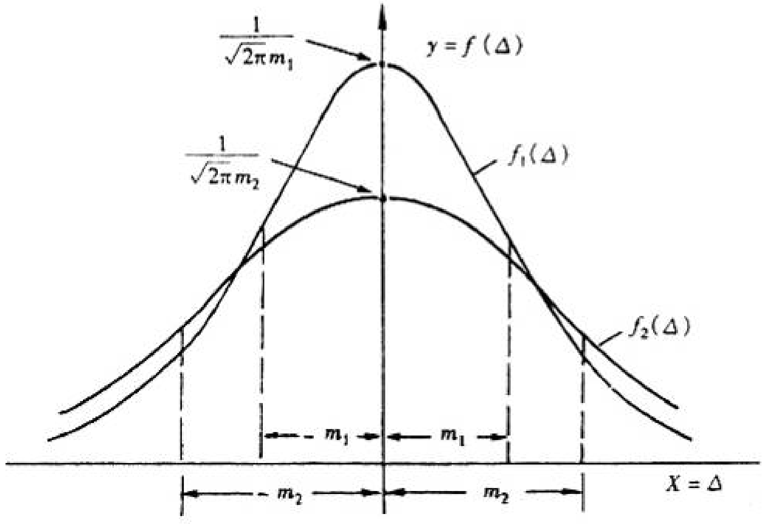
中误差计算示例

$m_1 = \pm 2.7''$ 为第一组观测值的中误差；

$m_2 = \pm 3.6''$ 为第二组观测值的中误差。

m_1小于m_2，说明第一组观测值的误差分布比较集中，其精度较高；相反，第二组观测值的误差分布比较离散，其精度较低。

精度的度量是对一组观测值而言，因而是个集合的概念。同一精度的一组观测值，各观测值的真误差可能不同，但各观测值的精度却是相同的。



3.2.2 极限误差

由偶然误差的第一个特性可知，偶然误差的绝对值不会超过一定的限值，该限值称为**极限误差**。

根据误差分布的概率密度函数，误差出现在微小区间$d\Delta$内的概率为：

$$P(\Delta)=f(\Delta)d\Delta=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,m}e^{-\frac{\Delta^2}{2m^2}}d\Delta$$

误差出现在K倍中误差区间内的概率为：

$$P(|\Delta|<km)=\int_{-km}^{+km}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,m}e^{-\frac{\Delta^2}{2m^2}}d\Delta$$

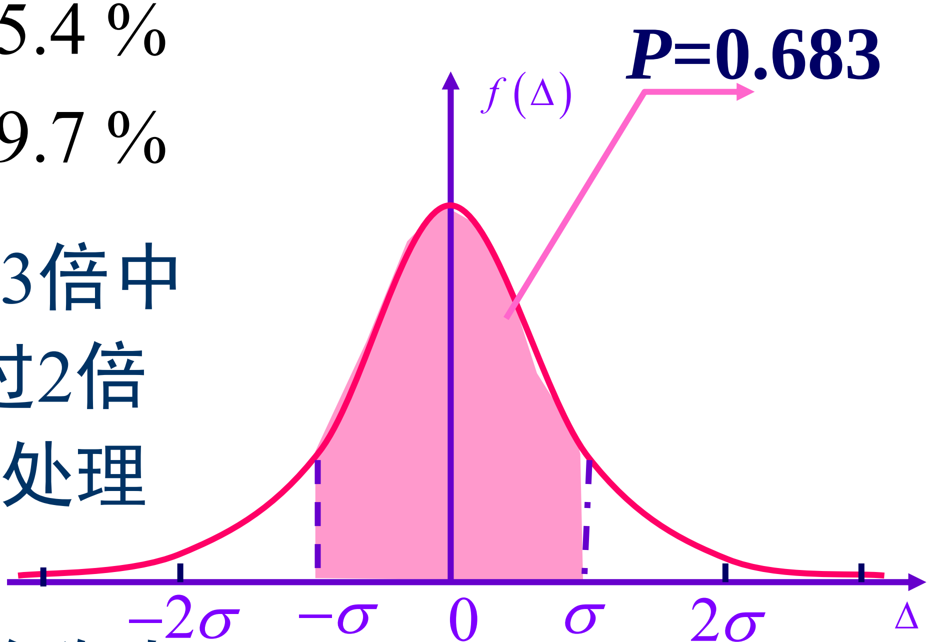
3.2.2 极限误差

将 K=1、2、3分别代入上式，可分别得到偶然误差出现在1倍、2倍、3倍中误差区间内的概率为：

$$P(|\Delta| \le \sigma) = 0.683 = 68.3\ \%$$

$$P(|\Delta| \le 2\sigma) = 0.954 = 95.4\ \%$$

$$P(|\Delta| \le 3\sigma) = 0.997 = 99.7\ \%$$



偶然误差分布曲线

在实际测量中，超出2倍或3倍中误差的概率极小。一般称超过2倍或3倍的中误差为粗差，数据处理时应舍去相应的观测值。

因此，可将2倍或3倍中误差称为**极限误差**。

3.2.3 相对误差

真误差和中误差都是绝对误差。在衡量测量精度时，单纯用绝对误差有时还不能完全表达精度的优劣。

例如，分别丈量了长度为100m和200m的两段距离，它们的中误差均为±0.02m，显然不能认为这两段距离的精度相同。

相对误差指某种误差与观测值的比值。

常用的相对误差包括相对真误差、相对中误差和相对极限误差。

3.2.3 相对误差

相对真误差：指真误差与观测值之比。

即 $K = |\varDelta| / L$

相对中误差：指中误差与观测值之比。

即 $K = |m| / L$

相对极限误差：指极限误差与观测值之比。

即 $K = |\varDelta_{限}| / L$

对于角度观测，其误差大小通常与观测值本身大小无关，因此不能采用相对误差的概念。

第三章 测量数据的误差及精度分析

1 误差理论的基本知识

2 衡量精度的指标

3 算数平均值计算中误差

4 误 差 传 播 定 律

5 权

6 误差理论的一些基本应用

3.3.1 算术平均值

如计算一组观测值l_i的中误差m，需要知道观测值的真误差Δ_i，即

$$\Delta_i = l_i - L$$

由于真值常常无法确定，造成真误差难以求得。在实际应用中，一般是采用观测值的算术平均值$\overline{L}$代替真值的方法来处理，即

$$\overline{L} = \frac{l_1 + l_2 + \cdots l_n}{n} = \frac{[l]}{n}$$

下面证明，$\overline{L}$是关于L的无偏估计，由上面两式可得

$$\lim_{n\to\infty} \overline{L} = \lim_{n\to\infty} \frac{[l]}{n} = L + \lim_{n\to\infty} \frac{[\Delta]}{n} = L$$

观测值l_i与算术平均值$\overline{L}$之差称为改正数v_i，即

$$v_i = \overline{L} - l_i$$

3.3.2 利用改正数计算中误差

$$m = \pm\hat{\sigma} = \pm\sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots \Delta_n^2}{n}} = \pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}$$

利用上式计算中误差时，需知道观测值的真误差 $\varDelta$，通常情况下，观测值的真值X是无法知道的，所以真误差 $\varDelta$ 也不能求出。这时，就只能利用观测值的最优估值即算术平均值 $\tilde{x}$ 来计算中误差。

设对某未知量进行了一组等精度观测，其真值为 X，观测值分别为x_1、x_2……、x_n，相应的真误差为 $\varDelta_1$ $\varDelta_2$……、$\varDelta_n$，则

3.3.2 利用改正数计算中误差

改正数为

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \tilde{x} - x_1 \\ v_2 &= \tilde{x} - x_2 \\ &\cdots \\ v_n &= \tilde{x} - x_n \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}1)$$

若该量的真值 X 为已知，则真误差为

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= x_1 - X \\ \Delta_2 &= x_2 - X \\ &\cdots \\ \Delta_n &= x_n - X \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}2)$$

将(3-1)及(3-2)两式相加，得

3.3.2 利用改正数计算中误差

$$\left.\begin{aligned} v_1+\Delta_1&=\tilde{x}-X \\ v_2+\Delta_2&=\tilde{x}-X \\ &\cdots \\ v_n+\Delta_n&=\tilde{x}-X \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta_i=\left(\tilde{x}-X\right)-v_i \tag{3-3}$$

将(3-3)式两边平方求和得

$$\left[\Delta\Delta\right]=\left[vv\right]-2\left[v\right]\left(\tilde{x}-X\right)+n\left(\tilde{x}-X\right)^2 \tag{3-4}$$

3.3.2 利用改正数计算中误差

将(3-1)式求和，可得

$$[v]=\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x}-x_i)=n\tilde{x}-[x_i]=0$$

因此

$$\tilde{x}-X=\frac{[x_i]}{n}-X=\frac{[x_i-X]}{n}=\frac{[\Delta]}{n} \tag{3-5}$$

$$\xrightarrow{\text{平方}}$$

$$(\tilde{x}-X)^2=\left(\frac{[\Delta]}{n}\right)^2=\frac{[\Delta\Delta]}{n^2}+\frac{2}{n^2}(\Delta_1\Delta_2+\Delta_1\Delta_3+\cdots+\Delta_1\Delta_n+\cdots+\Delta_{n-1}\Delta_n) \tag{3-6}$$

3.3.2 利用改正数计算中误差

$$(\tilde{x}-X)^2=\left(\frac{[\Delta]}{n}\right)^2=\frac{[\Delta\Delta]}{n^2}+\frac{2}{n^2}(\Delta_1\Delta_2+\Delta_1\Delta_3+\cdots+\Delta_1\Delta_n+\cdots+\Delta_{n-1}\Delta_n)$$

（3-6）

偶然误差的积仍具有偶然误差特性，上式变为

$$(\tilde{x}-X)^2=\frac{[\Delta\Delta]}{n^2} \quad （3\text{-}7）$$

则将(3-5)和(3-7)式代入(3-4)式得

$$[\Delta\Delta]=[vv]+\frac{[\Delta\Delta]}{n}$$

或

$$\frac{[\Delta\Delta]}{n}=\frac{[vv]}{n-1} \quad （3\text{-}8）$$

3.3.2 利用改正数计算中误差

即

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{(n-1)}} \tag{3-9}$$

上式也称为贝塞尔（Bessel）公式，用于利用改正数计算等精度观测值的中误差。

第三章 测量数据的误差及精度分析

1 误差理论的基本知识

2 衡量精度的指标

3 算数平均值计算中误差

4 误 差 传 播 定 律

5 权

6 误差理论的一些基本应用

3.4 误差传播定律

在实际测量工作中，某些未知量不可能或不便于直接进行观测，需要由另外一些直接观测量根据一定的函数关系计算出来。

例如，欲测量不在同一水平面上两点间的距离D，可以用光电测距仪测量斜距S，并用经纬仪测量竖直角α，采用函数关系式$D=S\cos\alpha$来推算。显然，由于观测值有误差，必然会导致利用观测值所计算的量也有误差。

把阐述独立观测值误差项和观测值函数误差项之间关系的定律，称为误差传播定律。

3.4 误差传播定律

设有独立观测值 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，其对应的中误差分别为 $m_1, m_2, \ldots, m_n$。

设有n个独立观测值的函数 $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 试求 m_z

$$\xrightarrow{\text{对函数全微分}} dz = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

（3-12）

由于真误差 Δx和 Δz均是极小值，故可用其代替上式中的微分变量，则

$$\Delta Z = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n \qquad (3\text{-}13)$$

3.4 误差传播定律

$$\Delta Z=\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n \qquad (3\text{-}13)$$

若对函数Z进行了N组观测，对式(3-13)平方求和，并取平均值，即

$$\frac{[\Delta Z^2]}{N}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\frac{[\Delta x_1^2]}{N}+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\frac{[\Delta x_2^2]}{N}+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2\frac{[\Delta x_n^2]}{N}+\frac{2}{N}\sum_{\substack{i=1,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)[\Delta x_i\Delta x_j]$$

独立观测量 x_i x_j 的偶然误差 Δx_i、Δx_j 之积$\Delta x_i\Delta x_j$ 也为偶然误差，根据偶然误差的抵偿性，则有

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\frac{[\Delta x_i\Delta x_j]}{N}=0 \quad (i\neq j) \qquad (3\text{-}14)$$

3.4 误差传播定律

即 $$\frac{[\Delta Z^2]}{N}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\frac{[\Delta x_1^2]}{N}+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\frac{[\Delta x_2^2]}{N}+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2\frac{[\Delta x_n^2]}{N}$$

根据中误差的定义，可得

$$m_z^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 m_{x_1}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 m_{x_2}^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 m_{x_n}^2 \tag{3-15}$$

$$m_z=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 m_{x_1}^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 m_{x_2}^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 m_{x_n}^2} \tag{3-16}$$

（注：$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 各量间相互独立）

(3-16) 即为观测值中误差与函数中误差的一般关系式，称为误差传播公式。

3.4 误差传播定律

求观测值函数中误差的步骤：

(1) 列出观测值函数的表达式：

$$Z=f(x_1,x_2,\cdots x_n)$$

(2) 对函数式求全微分，得出函数的真误差与观测值真误差之间的关系式：

$$d_Z=(\frac{\partial f}{\partial x_1})dx_1+(\frac{\partial f}{\partial x_2})dx_2+\cdots\cdots+(\frac{\partial f}{\partial x_n})dx_n$$

式中，$(\frac{\partial f}{\partial x_i})$ 是用观测值代入求得的值。

3.4 误差传播定律

$$d_Z = (\frac{\partial f}{\partial x_1})dx_1 + (\frac{\partial f}{\partial x_2})dx_2 + \cdots\cdots + (\frac{\partial f}{\partial x_n})dx_n$$

(3) 根据误差传播定律计算观测值函数中误差：

$$m_Z^2 = (\frac{\partial f}{\partial x_1})^2 m_1^2 + (\frac{\partial f}{\partial x_2})^2 m_2^2 + \cdots\cdots + (\frac{\partial f}{\partial x_n})^2 m_n^2$$

注意：误差传播定律的使用时，要求观测值是独立观测值。

3.4 误差传播定律

例3-4-1： 设在三角形ABC中，直接观测$\angle A$和$\angle B$，它们的中误差分别为$m_A=\pm 3''$和$m_B=\pm 4''$，试求$\angle C$中误差m_C：

解： 列函数式 $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$

求全微分 $dC = -dA - dB$

中误差式 $m_C = \pm\sqrt{m_A^2 + m_B^2} = \pm\sqrt{(\pm 3'')^2 + (\pm 4'')^2} = \pm 5''$

例3-4-2： 设测得圆形的半径r=1.465m，已知它的中误差为m=±0.002m，试求其周长 l 及它的中误差 m_l：

解： 列函数式 $l = 2\pi r = 2\pi \times 1.465 = 9.205m$

求全微分 $dl = 2\pi dr$

中误差式 $m_l = 2\pi \times (\pm 0.002) = \pm 0.013$

最后得到 $l = 9.205 \pm 0.013$

3.4 误差传播定律

例3-4-3： 有函数关系式$h=D\tan\alpha$，$D=(120.25\pm0.05)$mm，$m_\alpha=12°47'\pm0.5'$，求h值及其中误差m_h：

解： 列函数式 $$h=D\tan\alpha=120.25\tan12°47'=27.28\text{m}$$

求全微分 $$d_h=\tan\alpha dD+(D\sec^2\alpha)\frac{d\alpha'}{\rho'}$$

中误差式 $$m_h=\pm\sqrt{\tan^2\alpha m_D^2+(D\sec^2\alpha)^2(\frac{m'_\alpha}{\rho'})^2}$$

$$=\pm\sqrt{(0.2269)^2\times(0.05)^2+(126.44)^2(\frac{0.5'}{3438'})^2}$$

$$=\pm\sqrt{4.67\times10^{-4}}\text{m}^2$$

$$=\pm0.02\text{m}$$

$$\therefore \quad h=27.28\text{m}\pm0.02\text{m}$$

3.4 误差传播定律

例3-4-4： 对某距离丈量了n次，观测值为l_1、l_2、……、l_n，为相互独立的等精度观测值，观测中误差为m，试求其算术平均值L的中误差M：

解： 列函数式
$$L=\frac{l_1+l_2+\cdots l_n}{n}=\frac{1}{n}l_1+\frac{1}{n}l_2+\cdots\frac{1}{n}l_n$$

求全微分
$$dL=\frac{1}{n}dl_1+\frac{1}{n}dl_2+\cdots\frac{1}{n}dl_n$$

中误差式
$$M=\pm\sqrt{\frac{1}{n^2}m^2+\frac{1}{n^2}m^2+\cdots+\frac{1}{n^2}m^2}$$
$$=\pm\sqrt{\frac{nm^2}{n^2}}=\pm\frac{m}{\sqrt{n}}$$

因此，n次等精度直接观测值的算术平均值的中误差，为观测值中误差的 $1/\sqrt{n}$

中误差计算示例

例3-4-5：对某水平角等精度观测了5次，观测数据如下表，求其算术平均值及算术平均值的中误差。

解：该水平角真值未知，可用算术平均值改正数V计算中误差：

次数	观测值	V	VV	备注
1	76° 42′ 49″	-4	16	$m = \pm\sqrt{\frac{[VV]}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{60}{5-1}} = \pm 3.89''$
2	76° 42′ 40″	+5	25	
3	76° 42′ 42″	+3	9	$M = \pm\frac{m}{\sqrt{n}} = \pm\frac{3.89''}{\sqrt{5}} = 1.74''$
4	76° 42′ 46″	-1	1	
5	76° 42′ 48″	-3	9	$76°42'45'' \pm 1.74''$
均值	76° 42′ 45″	[V]=0	[VV]=60	

例3-4-6：对某距离用精密量距方法丈量六次，求①该距离的算术平均值$\tilde{x}$；②观测值的中误差 m；③算术平均值的中差 M；④算术平均值的相对中误差 M/x：

表 5-4 算术平均值的中误差

丈量次序	观测值 l (m)	Δl (mm)	改正值 v (mm)	vv (mm^2)
1	119.9864	6.4	+0.1	0.01
2	119.9867	6.7	−0.2	0.04
3	119.9850	5.0	+1.5	2.25
4	119.9851	5.1	+1.4	1.96
5	119.9867	6.7	−0.2	0.04
6	119.9890	9.0	−2.5	6.25
Σ	(l_0 = 119.98)	38.9	+0.1	10.55

第三章 测量数据的误差及精度分析

1 误差理论的基本知识

2 衡量精度的指标

3 算数平均值计算中误差

4 误 差 传 播 定 律

5 权

6 误差理论的一些基本应用

3.5 权

当对某一未知量进行*非等精度观测*时，各观测值的中误差各不相同，因此各观测值也就具有不同程度的可靠性。

中误差越小，精度越高，观测结果也越可靠，将这种可靠程度用数字表示称之为**权**。

在非等精度观测中引入权的概念，可以建立各观测值之间的精度比例关系，以便合理地处理观测数据。

3.5.1 权的计算公式

对某一未知量进行一系列等精度观测，观测次数为n，各观测值的中误差为m。将n个观测值分成两部分，即$n=n_1+n_2$。则这两部分观测值的算术平均值分别为

$$\overline{l_1}=\frac{1}{n_1}(l_1+l_2+\cdots+l_{n_1}) \qquad \overline{l_2}=\frac{1}{n_2}(l_{n_1+1}+l_{n_1+2}+\cdots+l_{n_1+n_2})$$

3.5.1 权的计算公式

$$\overline{l_1} = \frac{1}{n_1}(l_1 + l_2 + \cdots + l_{n_1}) \qquad \overline{l_2} = \frac{1}{n_2}(l_{n_1+1} + l_{n_1+2} + \cdots + l_{n_1+n_2})$$

算术平均值的中误差为：

$$m_{\overline{l_1}} = \frac{m}{\sqrt{n_1}} \qquad m_{\overline{l_2}} = \frac{m}{\sqrt{n_2}} \qquad （3\text{-}17）$$

如果n_1和n_2各不相同，则中误差不相同，因此精度也是不相同的。将 $\overline{l_1}$ 与 $\overline{l_2}$ 看作是不等精度的虚拟观测值。

算术平均值是真值的最优估计值，其值为：

$$\overline{l} = \frac{[l]}{n} = \frac{n_1\overline{l_1} + n_2\overline{l_2}}{n_1 + n_2} \qquad （3\text{-}18）$$

由(3-17)可得：

$$n_1 = \frac{m^2}{m_{\overline{l_1}}^2} \qquad n_2 = \frac{m^2}{m_{\overline{l_2}}^2} \qquad （3\text{-}19）$$

3.5.1 权的计算公式

$$n_1 = \frac{m^2}{m_{\bar{l}_1}^2} \qquad n_2 = \frac{m^2}{m_{\bar{l}_2}^2} \tag{3-19}$$

代入(3-18) 得

$$\bar{l} = \frac{[l]}{n} = \frac{\frac{m^2}{m_{\bar{l}_1}^2}\bar{l}_1 + \frac{m^2}{m_{\bar{l}_2}^2}\bar{l}_2}{\frac{m^2}{m_{\bar{l}_1}^2} + \frac{m^2}{m_{\bar{l}_2}^2}} \tag{3-20}$$

设$m=m_0$(单位权中误差)，取值 $p_i = \frac{m_0^2}{m_i^2}$ （3-21）

将(3-21)代入(3-20)得

$$\bar{l} = \frac{p_1\bar{l}_1 + p_2\bar{l}_2}{p_1 + p_2} \tag{3-22}$$

3.5.1 权的计算公式

$$\bar{l} = \frac{p_1\bar{l}_1 + p_2\bar{l}_2}{p_1 + p_2} \qquad （3-22）$$

上式为不同精度观测值 $\bar{l}_1$ 与 $\bar{l}_2$ 的加权平均值。由于加权平均值是真值的最优估值，根据权的意义，(3-21) 即为权的定义式：

$$p_i = \frac{m_0^2}{m_i^2} \qquad （3-21）$$

从加权平均值公式可以看出，只要各加权值的权之间的比例保持不变，加权平均值的值仍保持不变。因此，权的定义也可以写成：

$$p_i = \frac{c}{m_i^2} \qquad （3-23）$$

式中，c为任意正的常数。等于1的权称为**单位权**，而权等于1的中误差称为**单位权中误差**。

3.5.1 权的计算公式

权的性质：

(1) 权是相对性数值，表示观测值的相对精度；而中误差是绝对数值，表示观测值的绝对精度。

(2) 权与中误差的平方成反比，中误差越小，其权越大，表示观测精度越高。

(3) 权是一个相对数值，对于单个观测值而言，权没有意义。

(4) 权恒取正值，权的大小随c值的不同而改变，但其比例关系不变。

(5) 同一问题上只能选定一个c值。

3.5.1 权的计算公式

不同类型观测值权的确定方法：

(1) 角度观测值权的确定

由于角度观测值通常是等精度的，因而，各个角度观测值的权可以取相等值，且可以取任意的正数：

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_n$$

(2) 距离观测值权的确定

距离测量时，其精度是由固定误差a和与距离成正比的比例误差bD组成的。因此，距离测量中误差可以表示为$m=a+bD$的形式。其中，D是所测量的距离值，b是比例常数。对不同的距离D_i，其权的计算公式为：

$$p_i = \frac{c}{(a+bD_i)^2}$$

3.5.1 权的计算公式

(3) 水准测量观测值的权的确定

在水准测量中，设第i测段的高差观测值为h_i，测站数为n，测段距离为S。并假设每一测站观测高差的精度相同，其中误差为m。则第i个测段的高差测量值可以表达成：

$$h_i = h_1 + h_2 + \cdots + h_n$$

其中误差为：

$$m_{h_i}^2 = m_{h_1}^2 + m_{h_2}^2 + \cdots + m_{h_n}^2$$

假设以一个测站高差的中误差作为单位权中误差，则第i测段观测值的权为：

$$p_i = \frac{m^2}{m_{hi}^2} = \frac{m^2}{nm^2} = \frac{1}{n}$$

3.5.1 权的计算公式

$$p_i = \frac{m^2}{m_{hi}^2} = \frac{m^2}{nm^2} = \frac{1}{n}$$

即每个测段高差观测值的权，与该测段的测站数成反比。

在*平坦地区*，相邻测站间的距离大致相同。设每公里高差观测值的中误差为$\sigma_{公里}$。则测段的高差测量中误差为

$$m_{hi}^2 = m_1^2 + m_2^2 + \cdots m_s^2 = S\sigma_{公里}{}^2$$

式中，m_i表示每测段中，第i个1公里高差测量中误差，对应积累长是S公里。如果设1公里高差观测值的中误差为单位权中误差，则第i测段高差观测值的权为

$$p_i = \frac{\sigma_{公里}{}^2}{S\sigma_{公里}{}^2} = \frac{1}{S}$$

因此，在平坦地区，每个测段高差观测值的权，与该测段的距离成反比。

3.5.2 加权平均值及其中误差

如果对某一未知量进行了一系列等精度独立观测，则认为算术平均值是真值的最优估计值。

如果进行的是不等精度观测，取算术平均值作为真值的估计，则未必是最优的，此时应采用加权平均值。

设对某量进行了n次不等精度测量，观测值为 $l_1, l_2, \ldots, l_n$ 其对应的权值为 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ，观测值的最优估值为 L

最小二乘原理可由下述公式表示：

$$[pvv] = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \cdots + p_n v_n^2 = \min \qquad (3\text{-}24)$$

上式中观测值的改正数为

$$v_i = L - l_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad (3\text{-}25)$$

3.5.2 加权平均值及其中误差

将式(3-25)代入式(3-24)中得

$$p_1(L-l_1)^2+p_2(L-l_2)^2+\cdots+p_n(L-l_n)^2=\min \qquad （3\text{-}26）$$

对式(3-26)两边的L求导，得

$$2p_1(L-l_1)+2p_2(L-l_2)+\cdots+2p_n(L-l_n)=0$$

整理得

$$L=\frac{p_1l_1+p_2l_2+\cdots+p_nl_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=\frac{[pl]}{[p]} \qquad （3\text{-}27）$$

式中，L称为加权平均值。

3.5.2 加权平均值及其中误差

$$L=\frac{p_1l_1+p_2l_2+\cdots+p_nl_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=\frac{[pl]}{[p]} \tag{3-27}$$

根据误差传播定律，最优估值的中误差为

$$m_L^2=\frac{1}{[p]^2}\left(p_1^2m_1^2+p_2^2m_2^2+\cdots+p_n^2m_n^2\right) \tag{3-28}$$

式中，$m_1,m_2,\ldots,m_n$为相应观测值的中误差。

根据权的定义 $p_i=\frac{m_0^2}{m_i^2}$，则有

$$p_1m_1^2=p_2m_2^2=\cdots=p_nm_n^2=m_0^2$$

将上式，代入(3-28)中得

3.5.2 加权平均值及其中误差

则

$$m_L = \pm\sqrt{\frac{m_0^2}{[p]}}$$

又因为用观测值改正数计算单位权中误差的公式为

$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} \tag{3-29}$$

进而可得到：

$$m_L = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{[p](n-1)}} \tag{3-30}$$

式(3-30)即为用观测值改正数来计算不同精度观测值最优估值中误差的公式。

第三章 测量数据的误差及精度分析

1 误差理论的基本知识

2 衡量精度的指标

3 算数平均值计算中误差

4 误 差 传 播 定 律

5 权

6 误差理论的一些基本应用

3.6.1 利用真误差计算单位权中误差

设有一未知量L，其真值为$\tilde{L}$，对其进行了一系列不等精度观测，观测值为l_1、l_2、……、l_n，各观测值的权为p_1、p_2、……、p_n，则有

$$\Delta_i = l_i - \tilde{L} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

设某观测值的函数为

$$y_i = \sqrt{p_i} x_i$$

则有此函数的真误差为

$$\Delta y_i = \sqrt{p_i} \Delta_i$$

根据误差传播定理，此函数的中误差为

$$m_{y_i} = \sqrt{p_i} m_i$$

3.6.1 利用真误差计算单位权中误差

根据误差传播定理，此函数的中误差为 $m_{y_i} = \sqrt{p_i} m_i$

此函数的权为 $p_i = \dfrac{m_0{}^2}{m_{y_i}{}^2} = \dfrac{m_0{}^2}{p_i m_i{}^2} = \dfrac{1}{p_i} p_i = 1$

可见此函数的权为1，即等精度观测。

因此，如此函数作为虚拟观测值，则此观测值中误差为

$$m_y = \sqrt{\frac{[\Delta_y \Delta_y]}{n}}$$

将式 $\Delta y_i = \sqrt{p_i} \Delta_i$ 代入上式，并顾及到函数的权为1，因而，虚拟观测值的中误差就是单位权中误差。因此，利用真误差计算单位权中误差公式为

$$m_0 = m_y = \sqrt{\frac{[p\Delta\Delta]}{n}}$$

3.6.2 三角形闭合差计算测角中误差

在测角网中，同精度测量了许多三角形的内角。每个三角形的内角为 α_i,β_i,r_i。三角形的闭合差为

$$w_i=(\alpha_i+\beta_i+r_i)-180°$$

根据误差传播定律，三角形闭合差的中误差为

$$m_w^2=m_\alpha^2+m_\beta^2+m_\gamma^2=3m_{角}^2$$

因而有

$$m_w=\sqrt{3}m_{角} \qquad （3\text{-}33）$$

各三角形闭合差的精度是相同的。由于三角形闭合差的理论值真值为零，因而，根据中误差定义式，可以得到闭合差的中误差计算公式

$$m_w=\sqrt{\frac{[ww]}{n}}$$

3.6.2 三角形闭合差计算测角中误差

$$m_w = \pm\sqrt{\frac{[ww]}{n}}$$

将式(3-33)代入上式得测角中误差计算公式为

$$m_{角} = \frac{m_w}{\sqrt{3}} = \pm\sqrt{\frac{[ww]}{3n}}$$

此式为利用三角形内角和闭合差，计算测角中误差的公式，又称菲列罗公式。

3.6.3 用双观测值计算观测值中误差

在测量当中，经常出现双观测值的情形。例如，每段距离要往返测量两次。在水准测量中，两水准点间的高差要往返测量两次。

双观测值是指对同一个未知量进行两次测量。同一未知量的两次观测值，精度通常是相同的。但是，不同的双观测值，其精度可能不同。

设有未知观测量x_1、x_2、……、x_n，对它们进行了两次观测，观测值为

$$l_1', l_2', \cdots, l_n' \qquad l_1'', l_2'', \cdots, l_n''$$

它们的权为p_1、p_2、……、p_n。每对双观测值的差为

$$d_i = l_i' - l_i'' \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad （3\text{-}31）$$

3.6.3 用双观测值计算观测值中误差

$$d_i = l_i^{'} - l_i^{''} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad （3-31）$$

双观测值之差的理论值为零。因此，根据真误差的定义，双观测值之差的值等于真误差。设双观测值之差的权为 $p_1^{'}, p_2^{'}, \cdots, p_n^{'}$，根据$m_0 = m_y = \pm\sqrt{\frac{[p\Delta\Delta]}{n}}$，可得单位权中误差为

$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{[p^{'}dd]}{n}} \qquad （3-32）$$

根据误差传播定律，由式(3-31)，可得双观测值之差的中误差为

$$m_{d_i}^2 = m_{l_i^{'}}^2 + m_{l_i^{''}}^2 = 2m_{l_i}^2$$

3.6.3 用双观测值计算观测值中误差

$$m_{d_i}^2 = m_{l_i'}^2 + m_{l_i''}^2 = 2m_{l_i}^2$$

因此，双观测值之差的权为

$$p_i' \cdots\cdots = \frac{m_0^2}{m_{d_i}^2} = \frac{m_0^2}{2m_{l_i}^2} = \frac{p_i}{2}$$

将上式代入(3-32)，可得单位权中误差计算公式为

$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{[pdd]}{2n}}$$

得到单位权中误差后，结合各观测值的权，就可以计算出各观测值的中误差。